Le monopôle leptonique comme toupie symétrique

Georges Lochak
Fondation Louis de Broglie, Paris

I Introduction

Les équations du monopôle leptonique que nous avons proposées jusqu'ici suggèrent qu'il possède la symétrie d'une toupie symétrique et que sa charge magnétique a des valeurs quantifiées liées aux états de mouvement de la toupie. Nous chercherons ici, sur la base de cette image, une équation capable de décrire les transitions entre les valeurs de la charge, y compris à partir de zéro, autrement dit la naissance d'un monopôle. Nous examinerons nos équations précédentes, que nous généraliserons, en partant, comme précédemment, non pas de l'étude de Dirac sur l'interaction d'une charge électrique avec un monopôle lourd mais de son équation de l'électron, où nous ferons apparaître une seconde jauge correspondant à un monopôle magnétique.

II Rappels sur la théorie du monopôle leptonique

1) L'équation linéaire du monopôle magnétique leptonique.

Considérons les matrices γ_μ $(\mu=1,\ldots,4)$ de Dirac et celles de Clifford qui s'en déduisent :

$$\Gamma_N = \left\{ I, \gamma_\mu, i\gamma_\mu\gamma_\nu, i\gamma_\mu\gamma_5, \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \right\} (N=1,\ldots,16) \qquad (1,1)$$

Les Γ_N sont liées entre elles par les relations suivantes où le signe $\pm$ dépend de μ et de N :

$$\gamma_\mu \Gamma_N \gamma_\mu = \pm \Gamma_N \qquad (1,2)$$

Deux des matrices Γ_N commutent avec les quatre matrices γ_μ de Dirac. Ce sont

$\Gamma_1 = I$, qui commutent avec le signe + et $\Gamma_{16} = \gamma_5$ qui anti-commutent, donc avec le signe – :

a) $\Gamma_1 = I$, la première d'entre elles , définit comme on sait une invariance de jauge :

$$\psi \to e^{i\vartheta}\psi \qquad (1,3)$$

Ce qui entraîne l'invariance de l'équation libre de Dirac avec masse, sans champ extérieur :

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi + \frac{m_0 c}{\hbar}\psi = 0 \qquad (1,4)$$

b) La seconde matrice « commutante », $\Gamma_{16} = \gamma_5$, définit une nouvelle invariance de jauge :

$$\psi \to e^{i\frac{e}{\hbar c}\gamma_5 \vartheta}\psi \qquad (1,5)$$

qui entraîne, elle aussi, l'invariance de l'équation libre de Dirac **mais seulement en l'absence du terme linéaire de masse propre, en raison du signe moins dans** (1,2) :

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi = 0 \qquad (1,6)$$

L'invariance de jauge habituelle (1,3) définit une **dérivation covariante et une invariance de jauge locale** avec des potentiels de Lorentz polaires en raison de la covariance :

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - i\frac{e}{\hbar c}A_\mu\,;\ \psi \to e^{i\frac{e}{\hbar c}\phi}\psi\ ,\ A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\phi \qquad (1,7)$$

D'où l'équation de Dirac habituelle :

$$\gamma_\mu\left(\partial_\mu - i\frac{e}{\hbar c}A_\mu\right)\psi + \frac{m_0 c}{\hbar}\psi = 0 \qquad (1,8)$$

D'une façon analogue, on tire de (1,5) une **seconde dérivation covariante,** non plus avec des potentiels polaires mais avec des **pseudo-potentiels**, pour des raisons de covariance avec γ_5 :

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{\hbar c}\gamma_5 B_\mu\,;\ \psi \to e^{i\frac{e}{\hbar c}\gamma_5\phi}\psi\,;\ B_\mu \to B_\mu + \partial_\mu\phi \qquad (1,9)$$

D'où l'on obtient l'équation d'un monopôle magnétique leptonique de masse nulle (*Lochak 1983, 1084, 1985, 1995, 2007*) :

$$\boxed{\gamma_\mu\left(\partial_\mu - i\frac{g}{\hbar c}\gamma_5 B_\mu\right)\psi = 0} \qquad (1,10)$$

Cette équation, qui a plusieurs vérifications expérimentales, décrit un monopôle leptonique. Elle satisfait aux lois de symétries du magnétisme, de Maxwell et de P.Curie. Elle admet également (*Lochak 1983-ss*) une généralisation **non linéaire avec masse avec les mêmes lois de symétrie**, où figurent les deux invariants de Dirac :

$$\boxed{\gamma_\mu\left(\partial_\mu - i\frac{g}{\hbar c}\gamma_5 B_\mu\right)\psi + \frac{m\left(\Omega_1^2+\Omega_2^2\right)c}{2\hbar}\left(\Omega_1 - i\Omega_2\gamma_5\right)\psi = 0} \qquad (1,11)$$

$\Omega_1 = \overline{\psi}\psi$ est un scalaire relativiste et $\Omega_2 = -i\overline{\psi}\gamma_5\psi$ un pseudoscalaire ($\overline{\psi} = \psi^+\gamma_4$). La fonction $m\left(\Omega_1^2+\Omega_2^2\right)$ est évidemment un scalaire. Le pseudo-quadripotentiel B_μ et la phase pseudo-scalaire ϕ dans (1,9) sont imposés par l'antisymétrie de γ_5. Il en résulte que la charge magnétique ***g* est un scalaire vrai**, comme toutes les constantes physiques et non un pseudo-scalaire comme dans les autres théories du monopôle. La chiralité du magnétisme s'exprime non pas dans la constante g mais dans l'opérateur de charge : $G = g\gamma_5$.

2) L'équation à deux composantes (représentation de Weyl).

Considérons deux spineurs à deux composantes ξ et η, et la transformation de Weyl qui diagonalise l'opérateur de charge $G = g\gamma_5$ de valeurs propres opposées :

$$U\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma_4+\gamma_5\right)\psi = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix},\ UGU^{-1} = Ug\gamma_5U^{-1} = g\gamma_4\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & -g\end{pmatrix} \qquad (2,1)$$

Il s'ensuit que :

$$UGU^{-1}\begin{pmatrix}\xi\\ 0\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}\xi\\ 0\end{pmatrix};\quad UGU^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \eta\end{pmatrix} = -g\begin{pmatrix}0\\ \eta\end{pmatrix} \qquad (2,2)$$

Le renversement de charge n'est pas dû à un changement de signe de *g* mais au fait que les valeurs propres de l'opérateur G sont de signes opposés. L'équation (1,10) se décompose alors en **deux équations indépendantes gauche et droite** qui généralisent les équations du neutrino :

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{s}.\nabla-i\frac{g}{\hbar c}\left(W+\mathbf{s}.\mathbf{B}\right)\right)\xi=0\\&\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{s}.\nabla+i\frac{g}{\hbar c}\left(W-\mathbf{s}.\mathbf{B}\right)\right)\eta=0\end{aligned}} \tag{2,3}$$

Les parties cinétiques de ces équations correspondent au monopôle et à l'anti-monopôle à deux composantes. Les parties potentielles représentent l'interaction électromagnétique avec une charge magnétique gauche ou droite. **Les équations (2,3) montrent que le monopôle leptonique interviendra dans les interactions nucléaires faibles à la manière d'un neutrino doué d'une charge magnétique.** Ces monopôles sont manœuvrables par des champs électromagnétiques et on pourra les focaliser. **Ce qui a été prouvé expérimentalement par Ivoïlov en modifiant un émetteur beta sous l'effet d'un faisceau de monopôles** (*Ivoïlov*, 2006).

Les équations (2,3) s'échangent par C, P, T et l'on a :

$$\boxed{\begin{aligned}&P:\quad g\to g,\quad x_k\to -x_k,\quad t\to t,\quad B_k\to B_k,\quad W\to -W,\quad \xi\leftrightarrow\eta\\&T:\quad g\to g,\quad x_k\to x_k,\quad t\to -t,\quad B_k\to -B_k,\quad W\to W,\quad \xi\to s_2\xi^*,\quad \eta\to s_2\eta^*\\&C:\quad g\to g,\quad \xi\to -is_2\eta^*,\quad \eta\to is_2\xi^*\end{aligned}} \tag{2,4}$$

Les équations (2,3) représentent des particules conjuguées – un monopôle et un anti-monopôle – avec une même constante de charge magnétique *g*. La conjugaison de charge n'est donc pas un changement de signe de la charge magnétique mais de l'hélicité.

3) Les courants.

D'après (1,3) l'électricité J_μ est conservée par l'équation de Dirac (1,8) :

$$\partial_\mu J_\mu=0\quad\left(J_\mu=i\overline{\psi}\gamma_\mu\psi\right) \tag{3,1}$$

De même (1,10) entraîne, d'après (1,9), la conservation du courant magnétique :

$$\partial_\mu\Sigma_\mu=0\quad\left(\Sigma_\mu=i\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi\right) \tag{3,2}$$

Les courants J_μ et Σ_μ sont liés entre eux par les formules :

$$J_\mu\Sigma_\mu=0;\ -J_\mu J_\mu=\Sigma_\mu\Sigma_\mu=\Omega_1^2+\Omega_2^2\ \left(\Omega_1=\overline{\psi}\psi,\ \Omega_2=-i\overline{\psi}\gamma_5\psi\right) \tag{3,3}$$

D'après (3,3), le courant J_μ est du genre temps, comme on l'attend, mais Σ_μ est du genre espace, ce qui semble bizarre. Tout s'éclaire en représentation de Weyl (2, 3) qui relie les courants électrique et magnétique à **deux courants isotropes conservatifs gauche et droit.**

$$X_\mu=\left\{\xi^+\xi,-\xi^+\,\mathbf{s}\,\xi\right\};Y_\mu=\left\{\eta^+\eta,\eta^+\,\mathbf{s}\,\eta\right\}\ X_\mu=\left\{\xi^+\xi,-\xi^+\,\mathbf{s}\,\xi\right\};Y_\mu=\left\{\eta^+\eta,\eta^+\,\mathbf{s}\,\eta\right\}; \tag{3,4}$$

$$J_\mu=X_\mu+Y_\mu\ ;\Sigma_\mu=X_\mu-Y_\mu;\ \partial_\mu X_\mu=0;\ \partial_\mu Y_\mu=0$$

On voit que : J_μ est la **somme** des deux courants isotropes et est du genre temps d'après (3,3) ; Σ_μ est leur **différence**, qui est du genre espace, car $X_\mu Y_\mu = 4\left|\xi^+\eta\right|^2 \geq 0$. Ce que explique la différence entre les deux variances que nous avons trouvées.

4) Le monopôle dans un champ coulombien à l'approximation classique.

C'est dans ce cas que la théorie du monopôle leptonique a rejoint pour la première fois l'expérience. Soit l'approximation classique de l'équation en ξ de (2,3) :

$$\xi = ae^{iS/\hbar}, \ (\hbar \to 0) \quad (4,1)$$

On trouve :

$$\left[\frac{1}{c}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - gW\right) - \left(\nabla S + \frac{g}{c}\mathbf{B}\right).\mathbf{s}\right]a = 0 \quad (4,2)$$

Pour avoir une solution non triviale de ce système homogène en a il faut :

$$\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - gW\right)^2 - \left(\nabla S + \frac{g}{c}\mathbf{B}\right)^2\right] = 0 \quad (4,3)$$

C'est une équation de Jacobi relativiste de masse nulle qui définit une énergie cinétique, une impulsion, un moment de Lagrange, un Hamiltonien et des champs (*Lochak 1085, 1995, 2007*) :

$$E = -\frac{\partial S}{\partial t} + gW; \ \ \mathbf{p} = \nabla S + \frac{g}{c}\mathbf{B}; \ \ \mathbf{P} = \nabla S; \ \ H = c\sqrt{\left(\mathbf{P} + \frac{g}{c}\mathbf{B}\right)^2} - W \quad (4,4)$$

L'équation du mouvement est :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = g\left(\nabla W + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) - \frac{g}{c}\mathbf{v} \times rot\,\mathbf{B} \quad (4,5)$$

Soit encore, en termes de champs:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = g\left(\mathbf{H} - 1/c\ \mathbf{v} \times \mathbf{E}\right) \quad (4,6)$$

Comme la masse propre est nulle, on a v=c (vitesse de la lumière) et on ne peut pas écrire : $\mathbf{p} = \mathrm{m}\,\mathbf{v}$. Mais on peut écrire en terme d'énergie **p** = E/c²**v**, car $\mathrm{E} = Const$. Avec $\mathrm{W} = 0$, l'équation du mouvement à l'approximation de l'optique géométrique s'écrira :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\lambda \frac{1}{r^3}\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{r}; \quad \lambda = \frac{egc}{E} \quad (4,7)$$

On trouve ainsi l'équation de Poincaré de l'effet Birkeland (*Poincaré 1896*) créé par un pôle d'aimant sur le mouvement d'un électron. Notre équation n'est qu'au signe près car nous sommes dans le cas inverse où un pôle électrique agit sur le mouvement d'un monopôle. Cette équation étant vérifiée expérimentalement dans le cas Birkeland, la réciproque établie ci-dessus constitue pratiquement une preuve expérimentale de l'équation du monopôle soumis à un champ électrique. Ce résultat a été obtenu à partir de l'équation en ξ du monopôle. Avec l'équation en η et (4,1), nous aurions l'équation en b :

$$\left[\frac{1}{c}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+gW\right)-\left(\nabla S-\frac{g}{c}\mathbf{B}\right).\mathbf{s}\right]b=0 \tag{4,8}$$

L'équation (4,8) se déduit de (2,4) par les transformations P et T mais pas par la transformation C ; car C ne s'applique pas à a dans (4,2) mais à ξ dans (2,3), ce qui donne :

$$g\to g;\quad -is_2a^*\to b;\quad is_2b^*\to a;\quad S\to -S^* \tag{4,9}$$

On voit que (4,8) se déduit de (4,2) en inversant non pas la charge mais la phase de l'onde.

5) Description quantique du monopôle dans un champ coulombien.

Nous devons poser dans (2,4) :

$$W=0;\quad \mathbf{E}=rot\,\mathbf{B};\quad \mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{5,1}$$

D'où, dans un champ coulombien :

$$rot\,\mathbf{B}=\mathbf{e}\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{5,2}$$

Soit, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}&B_x=\frac{e}{r}\frac{yz}{x^2+y^2},\ B_y=\frac{e}{r}\frac{-xz}{x^2+y^2},B_z=0\quad \left(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right),\quad \text{soit:}\\ &\mathbf{B}=e\mathbf{C};\quad C_x=\frac{1}{r}\frac{yz}{x^2+y^2},\ C_y=\frac{1}{r}\frac{-xz}{x^2+y^2},C_z=0\end{aligned} \tag{5,3}$$

D'où, en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}&B_x=\frac{e}{r}\frac{\sin\varphi}{tg\theta},\ B_y=\frac{e}{r}\frac{-\cos\varphi}{tg\theta},\ B_z=0;\ \mathbf{B}=e\mathbf{C}\\ &\mathbf{s}.\mathbf{B}=\frac{e}{r}\left(s_1\frac{\sin\varphi}{tg\theta}+s_2\frac{-\cos\varphi}{tg\theta}\right);\ \mathbf{s}.\mathbf{C}=\frac{1}{r}\left(s_1\frac{\sin\varphi}{tg\theta}+s_2\frac{-\cos\varphi}{tg\theta}\right)\end{aligned} \tag{5,4}$$

Introduisons ces dernières expressions dans (2,3) en posant :

$$\boxed{\mathrm{D}=\frac{\mathrm{eg}}{\hbar\mathrm{c}}}=\text{nombre de Dirac}$$

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{s}.\nabla-i\,D\frac{1}{r}\left(s_1\frac{\sin\varphi}{tg\theta}+s_2\frac{-\cos\varphi}{tg\theta}\right)\right]\xi=0\\ &\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{s}.\nabla-i\,D\frac{1}{r}\left(s_1\frac{\sin\varphi}{tg\theta}+s_2\frac{-\cos\varphi}{tg\theta}\right)\right]\eta=0\end{aligned} \tag{5,5}$$

Soit encore :

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{s}.\nabla-i\,D\;\mathbf{s.C}\right]\xi=0;\quad\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{s}.\nabla-i\,D\;\mathbf{s.C}\right]\eta=0 \qquad (5,6)$$

Elles ne diffèrent que d'un signe dans la partie cinétique, celui de la chiralité. Ce sont deux monopôles gauche et droit dans un champ coulombien, qui généralisent l'équation de Poincaré (4,7).

Or Poincaré avait obtenu l'intégrale première suivante du moment cinétique :

$$\Lambda=\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\lambda\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (5,7)$$

Les correspondants quantiques de cette intégrale pour les équations (5,6) sont :

$$J_{\xi}=\hbar\left[\mathbf{r}\times\left(-i\nabla+D\mathbf{C}\right)+D\frac{\mathbf{r}}{r}+\frac{1}{2}\mathbf{s}\right];\quad J_{\eta}=\hbar\left[\mathbf{r}\times\left(-i\nabla-D\mathbf{C}\right)-D\frac{\mathbf{r}}{r}+\frac{1}{2}\mathbf{s}\right] \qquad (5,8)$$

Leurs composantes 1, 2, 3 pour ξ ou η, satisfont aux relations :

$$\left[J_2,J_3\right]=i\hbar J_1;\left[J_3,J_1\right]=i\hbar J_2;\left[J_1,J_2\right]=i\hbar J_3 \qquad (5,9)$$

Posons alors, toujours pour ξ ou η :

$$\mathbf{J}=\left[\Lambda+\frac{1}{2}\mathbf{s}\right];\ \Lambda=\mathbf{r}\times\left(-\mathbf{i}\nabla+D\mathbf{B}\right)+D\frac{\mathbf{r}}{r}\ ,\ \text{[D défini en (5,5)]} \qquad (5,10)$$

Les composantes Λ_k correspondent au Λ de Poincaré. On a, en angles polaires :

$$\begin{aligned}
\Lambda^{+}&=\Lambda_1+i\Lambda_2=e^{i\varphi}\left(i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{D}{sin\theta}\right)\\
\Lambda^{-}&=\Lambda_1-i\Lambda_2=e^{-i\varphi}\left(i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{D}{sin\theta}\right)\\
\Lambda_3&=-i\frac{\partial}{\partial\varphi}
\end{aligned} \qquad (5,11)$$

Les Λ_k obéissent aux relations (5,9) et leurs états propres $Z(\theta,\ \varphi)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
&\left(\Lambda^2\right)Z=j(j+1)Z;\Lambda_3 Z=mZ;\\
&j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\ldots;m=-j,-j+1,\ldots,j-1,j
\end{aligned} \qquad (5,12)$$

On a ici un point important pour la suite. Dans nos publications antérieures, pour simplifier les calculs nous avons introduit un angle χ (l'angle d'Euler de rotation propre) et un changement de fonctions :

$$\Omega(\theta,\varphi,\chi)=e^{iD\chi}Z(\theta,\varphi) \qquad (5,13)$$

Ce qui équivaut à ajouter une **cinquième dimension** dans l'espace de configuration. Les $\Omega(\theta,\varphi,\chi)$ sont les fonctions propres d'opérateurs R_K qui se déduisent trivialement de (5,11) :

$$R^{+} = R_1 + i R_2 = e^{i\varphi}\left(i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\chi}\right)$$
$$R^{-} = R_1 - i R_2 = e^{-i\varphi}\left(i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\chi}\right) \qquad (5,14)$$
$$R_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Les R_k sont les opérateurs infinitésimaux du groupe des rotations exprimés dans le système propre (on les trouvera dans tous les livres sur la théorie des groupes). Les angles θ, φ, χ sont les angles d'Euler. **Mais jusqu'ici, seuls les angles θ *et* φ figuraient dans nos équations du monopôle et il manquait l'angle χ de rotation propre.** On voyait, à l'approximation de l'optique géométrique, que le monopôle a la symétrie d'une toupie dont l'axe est orienté suivant les angles θ (nutation) et φ. Mais la rotation propre manquait : la toupie restait immobile. Néanmoins, la projection du moment orbital sur l'axe de symétrie n'était pas nulle parce que les deux particules en présence ont des charges de nature différente et de signe contraire.

On trouve pour les états propres des opérateurs R_k les résultats connus :

$$\Omega_j^{m',m}(\theta,\varphi,\chi) = e^{i(m\varphi+m'\chi)} d_j^{m',m}(\theta)$$
$$d_j^{m',m}(\theta) = N(1-u)^{\frac{-(m-m')}{2}}(1+u)^{\frac{-(m+m')}{2}}\left(\frac{d}{du}\right)^{j-m}\left[(1-u)^{j-m'}(1+u)^{j+m'}\right]$$
$$u=\cos\theta, \quad N = \frac{(-1)^{j-m} i^{m-m'}}{2^j}\left(\frac{(j+m)!}{(j-m)!(j-m')!(j+m')!}\right)^{1/2} \qquad (5,15)$$
$$j=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\ldots, \quad m,m' = -j,-j+1,\ldots,j-1,j$$

En rapprochant (5,13) de (5,15), on voit que nos équations donnent un nouveau sens à la formule de Dirac ($D=\frac{n}{2}, n=1,2,3,\ldots$), car **il apparaît que *D* est le nombre quantique de la projection du moment cinétique sur l'axe de symétrie** :

$$\boxed{D = m' = \frac{eg}{\hbar c} = -j,-j+1,\ldots,j-1,j} \qquad (5,16)$$

Il s'ensuit que **l'apparition des nombres demi-entiers est simplement due à la double connexité du groupe des rotations** et non à un modèle physique particulier, car la quantification des moments cinétiques J_k ne repose que sur les Λ_k et donc sur les opérateurs de rotation R_K définis en (5,14).

Ainsi, nous pourrons généraliser les équations (2,3) en introduisant l'angle manquant de rotation propre. Ce qu'on ne peut pas faire dans le cas général (2,3), mais seulement dans le cas (5,5) du **champ coulombien** où l'absence de cet angle est évidente.

6) Généralisation de l'équation du monopôle dans un champ coulombien.

Nous généraliserons (5,5) par la substitution :

$$D = \frac{eg}{\hbar c} \Rightarrow -i\frac{\partial}{\partial\chi} \qquad (6,1)$$

Ce qui donnera un **nouveau système** que nous écrirons :

$$\boxed{\begin{array}{l}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{s}.\nabla-\frac{1}{r}\left(s_1\frac{\sin\varphi}{tg\theta}+s_2\frac{-\cos\varphi}{tg\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\chi}\right]\xi=0\\ \left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{s}.\nabla-\frac{1}{r}\left(s_1\frac{\sin\varphi}{tg\theta}+s_2\frac{-\cos\varphi}{tg\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\chi}\right]\eta=0\end{array}} \quad \Rightarrow \qquad (6,2)$$

$$\boxed{\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{s}.\nabla-i\ \mathbf{s}.\mathbf{C}\frac{\partial}{\partial\chi}\right]\xi=0;\quad \left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{s}.\nabla-i\ \mathbf{s}.\mathbf{C}\frac{\partial}{\partial\chi}\right]\eta=0} \ (\mathbf{B}=e\mathbf{C}) \qquad (6,3)$$

Les intégrales premières généralisant (5,8) s'écriront, grâce à (5,3) et (5,4) :

$$\boxed{J_\xi=\hbar\left[\mathbf{r}\times\left(-i\nabla-i\mathbf{C}\frac{\partial}{\partial\chi}\right)-i\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial}{\partial\chi}+\frac{1}{2}\mathbf{s}\right];\quad J_\eta=\hbar\left[\mathbf{r}\times\left(-i\nabla+i\mathbf{C}\frac{\partial}{\partial\chi}\right)+i\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial}{\partial\chi}+\frac{1}{2}\mathbf{s}\right]} \qquad (6,4)$$

Les relations (5,9) se conservent car la dérivation en χ commute avec les autres grandeurs. Avant d'aller plus loin faisons une remarque. On a vu que $D = m'$, nombre quantique de la projection du moment cinétique total du système monopôle-centre coulombien sur l'axe de symétrie. Si D et donc m' sont demi-entiers, il en sera de même pour m (projection sur Oz) et pour j (moment cinétique total). Mais en ajoutant le spin, le moment total sera :

$$\mathsf{J}=\hbar(\Lambda+\frac{1}{2}\mathbf{s}) \qquad (6,5)$$

et **J sera entier : le monopôle sera dans un état boson ;** mais si, au contraire, m', m et j sont entiers, **J sera demi-entier et le monopôle sera dans un état fermion.** On remarquera que c'est vrai si m', m et j sont nuls, ce qui est normal, puisqu'on est alors dans le cas de l'équation de Dirac sans champ.

Nous verrons tout de suite que le magnétisme se conserve moins bien que l'électricité, mais il semble déjà que même le spin n'est pas absolument défini car il est passé du stade de constante absolue (comme une charge électrique) à celui d'une intégrale première dans (5,16). Autrement dit, la charge magnétique se conserve au cours du temps, mais elle peut prendre différentes valeurs, du fait qu'elle est définie par un moment cinétique.

Pour le voir encore mieux, reprenons nos équations (5,5) et (5,6) en ajoutant à la charge électrique coulombienne qui y figure une petite perturbation électromagnétique εB_1 :

$$\begin{array}{l}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{s}.\nabla-\frac{1}{r}\left(s_1\frac{\sin\varphi}{tg\theta}+s_2\frac{-\cos\varphi}{tg\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\chi}+i\varepsilon B_1\right]\xi=0\\ \\ \left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{s}.\nabla-\frac{1}{r}\left(s_1\frac{\sin\varphi}{tg\theta}+s_2\frac{-\cos\varphi}{tg\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\chi}+i\varepsilon B_1\right]\eta=0\end{array} \qquad (6,6)$$

Posons maintenant, à ε^2 près, ξ_0 et η_0 désignant les solutions pour $\varepsilon = 0$:

$$\xi=\xi_0+\delta\xi;\ \eta=\eta_0+\delta\eta \qquad (6,7)$$

Nous aurons les équations approchées :

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{s}.\nabla-\frac{1}{r}\left(s_1\frac{\sin\varphi}{tg\theta}+s_2\frac{-\cos\varphi}{tg\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\chi}\right]\delta\xi+i\varepsilon B_1\xi_0=0$$

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{s}.\nabla-\frac{1}{r}\left(s_1\frac{\sin\varphi}{tg\theta}+s_2\frac{-\cos\varphi}{tg\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\chi}\right]\delta\eta+i\varepsilon B_1\eta_0=0 \qquad (6,8)$$

On voit que $\delta\xi$ et $\delta\eta$ contiendront des fréquences différentes de celles de ξ_0 et η_0, y compris pour l'angle χ, **d'où l'apparition de nouvelles charges magnétiques** dues à l'introduction du champ extérieur. D'autre part, on sait d'après (3,2) que si des conditions extérieures sont descriptibles par des quasi-potentiels, le courant magnétique se conserve, de même que se conservait le courant électrique dans l'équation de Dirac en présence des potentiels de Lorentz. Mais la différence entre les deux cas, électrique et magnétique, est que, tandis que les charges électriques qui interviennent dans l'équation de Dirac, sont des constantes absolues qui ne dépendent pas des interactions, au contraire, dans ma nouvelle équation, la charge magnétique dépend du troisième angle d'Euler (de rotation propre) qui peut changer sous l'effet d'une nouvelle interaction et faire apparaître de nouvelles charges magnétiques, même si cette interaction est de caractère électrique. **Autrement dit, la charge électrique est une constante universelle, alors que la charge magnétique ne pourra être qu'une intégrale première**.

On peut se demander si c'est admissible et si ma nouvelle équation n'est pas à rejeter. Cette question est légitime, mais je pense que la réponse est non ; elle se trouve dans le paragraphe 5). En effet, nous avons vu qu'à l'approximation classique notre équation du monopôle se ramenait à celle d'une toupie classique avec les mêmes lois de symétrie. Mais si l'on retrouvait bien, dans le monopôle, l'axe de symétrie de la toupie, qui lui semble inhérent, il manquait l'angle de rotation : la toupie était immobile. Comment ne pas tenter d'introduire cet angle, surtout quand on découvre ensuite qu'il est égal à la charge magnétique ?

Il faut reconnaître qu'on porte ainsi atteinte à la symétrie entre l'électricité et le magnétisme. La différence essentielle est celle que nous venons de souligner : nous savons créer des charges magnétiques mais non pas des charges électriques. **Mais - point principal - c'est un fait d'expérience, dont la nouvelle équation ne fait que rendre compte** car nous savons effectivement faire naître des monopôles grâce à des actions purement électriques dans un milieu qui, à notre connaissance, n'en contenait pas, tandis que nous savons seulement extraire des charges électriques d'un milieu où nous elles se trouvaient déjà : nous ne savons pas les créer.

Il y a une primauté de l'électricité sur le magnétisme et c'est pourquoi nous vivons dans un monde électrique peuplé d'électrons et de protons et non pas dans un monde magnétique peuplé de monopôles.

Littérature

Aharonov Y., Bohm D. (1959) Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. Physical Review, **115**, 485–491.

Akhiezer A.I., Berestetski V.B. (1965). *Quantum Electrodynamics*, Interscience, N.Y.

Ampère A.-M. (1958) *Théorie mathématique des phénomènes électrodyamiques uniquement déduite de l'expérience,* Blanchard, Paris, (original edition : 1827).

Bachelot A. (1988 a). *Global Existence of Large Amplitude Solutions to Nonlinear Wave Equations in Minkowski Space*, Preprint N°8802 UER de Math Bordeaux I.

Bachelot A. (1988 b). *Mémoire d'Habilitation,* Université de Bordeaux I, Bardout G., Lochak G., Fargue D. (2007). Sur la présence de monopôles magnétiques légers au Pôle nord. *Ann. Fond. L. de Broglie*, ***32***, 551–553.

Bargmann V. & Wigner E.P., 1948 *Group theoretical discussion of relativistic wave equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **34**, 211–223.

Barrett T.W. (1989). On the distinction between fields and their metric, *Ann. Fond. L. de Broglie*, **14**, 37–75.

Bass, L. and Schrödinger, E. (1955). Must the photon mass be zero? Proc. Roy. Soc. A, 232, 1–6.

Berestetsky V.B., Lifschitz & Pitaevsky L.P. (1968). *Théorie quantique relativiste,* Nauka, French translation Mir, Moscou 1972.

Birkeland, 1896 *Archives des Sciences Physiques et Naturelles de Genève*, I, 4e période juin 1896.

Bohm D. (1960). *Quantum Theory*, Prentice Hall, London,

Born M., Wolf, E. (1964). Principles of Optics, Pergamon, Oxford.

Borne Th., Lochak G., H. Stumpf H. (2001). *Nonperturbative Quantum Field Theory and the Structure of Matter,* Kluwer, Dordrecht.

Broglie L. de (1940–1942). *Une nouvelle théorie de la lumière, la mécanique ondulatoire du photon* (Tome I: *La lumière dans le vide)* ; Hermann, Paris 1940 ; (Tome II: *L'interaction entre les photons et la matière*), Hermann, Paris, 1942.

Broglie L. de (1943). *La théorie générale des particules à spin,* Gauthier-Villars, Paris,.

Cabibbo N. & Ferrari G. (1962). Quantum electrodynamics with Dirac monopoles. *Nuovo Cimento*, **23**, 1147–1154.

Cabrera B. (1982). First results from a superconductive detector for moving magnetic monopoles. *Phys. Rev. Lett.*, **48,** 1378–1381.

Cartan E. (1938) *Leçons sur la théorie des spineurs,* Hermann, Paris.

Case K. M. (1957). Reformulation of the Majorana theory of the neutrino. Phys. Rev. 107, 307–316.

Costa de Beauregard O. (1943). Contribution à l'étude de la théorie de l'électron de Dirac. *Thèse,* Paris.

Costa de Beauregard O. (1995). Electromagnetic gauge as integration condition: Einstein's mas–energy equivalence law and action–reaction opposition. In: *Advanced Electromagnetism,* Ed. T.W. Barrett and D.M. Grimes, World Scientific, Singapore p. 77-104

Costa de Beauregard O. (1997a). A new c^{-2} effect : a hidden angular momentum in magnets, *Physics Essays,* 10, 492-496

Costa de Beauregard O. (1997b). Induced electromagnetic inertia and physicality of the four-vector potential. *Physics Essays,* 10, 646–650

Costa de Beauregard O. & Lochak G. (1999) *The action of an Electrostatic Potential on the Electron Mass,* Comment on Mikhailov's article Ann. Fond. Louis de Broglie, **24**, 159–160.

Costa de Beauregard, O. & Lochak G. (2000). *The vector potential mesured in a Tonomura experiment*, Ann. Fond. L. de Broglie, **25**, 303–308.

Curie P. (1894 a). Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique *Journal de Physique*, 3, 393–415.

Curie P. (1894 b). Sur la possibilité d'existence de la conductibilité magnétique et du magnétisme libre. *Journal de Physique,* 3, 415–417.

Curie P. (1994). Preceding papers republished in the: *Annales de la Fondation Louis de Broglie,* **19**, p. 137–157 and p.159–160.

Daviau.C & Lochak G. (1991) Sur un modèle d'équation spinorielle non linéaire. *Ann. Fond. L. de Broglie*, **16**, 43–71.

Daviau C., Fargue D., Priem D. Racineux G. (2013), Tracks of magnetic monopoles, . *Ann. Fond. L. de Broglie* **38**, 139–153.

Daviau C., Priem D. Racineux G. (2013), Experimental report on magnetic monopoles, . *Ann. Fond. L. de Broglie* **38**, 189–194.

Dirac P. A. M. (1931). Quantised singularities in the electromagnetic field. *Proc. Roy. Soc.,* A, **133**, 60–72.

Dirac P. A. M. (1936). Relativistic wave equations. *Proc. Roy. Soc.,* A, **155**, 447–459.

Dirac P. A. M. (1948). The theory of magnetic poles. *Phys. Rev.,* **74**, 817–830.

Dirac P. A. M. (1978a). The monopole concept. *Int. J. of Theor. Phys.,* **17**, 235–247

Dirac P. A. M. (1978b), *Directions in Physics,* John Wiley, N.Y., London, Sidney, Toronto.

Finkelstein R., Lelevier P. & Ruderman, M. (1951). Nonlinear spinor fields. *Phys. Rev.,* 16, 326–332.

Gelfand I.M., Minlos R.A. and Shapiro Z.Y)1963). *Representation of the rotation and Lorentz groups and applications,* Pergamon Press, New-York,.

Goldstein H., 1980 *Classical Mechanics*, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts,

Heisenberg W. (1953). Remarques sur la théorie neutrinienne de la lumière. In *Louis de Broglie Physicien et penseur,* Albin Michel, Paris, 283–286.

Heisenberg W. (1954). Zur Quantentheorie nichtrenormalisierter Wellengleichungen. *Z. für Naturforschung,* 9a, p. 292–303.

Heisenberg W. 1966 d, *Introduction to the unified field theory of elementary particles,* Interscience, London.

Hooft G.'t, (1974) Magnetic monopoles in unified gauge theories. *Nuclear Physics,* B 79, 276–284.

Ince E.L. (1956). *Ordinary differential equations*, Dover, New-York.

Ivoilov N.G. Low-Energy Generation of "strange" Radiation Ann. Fond. Louis de Broglie Vol. 31, N°1, 2006, p. 115 - 124.

Jackson J. D. (1975). *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, N.Y.)

Jakobi G. & Lochak G. (1956a). Introduction des paramètres relativistes de Cayley-Klein dans la représentation hydrodynamique de la mécanique ondulatoire, *C. R. Acad. Sci.*, **243** p. 234-238.

Jakobi G. & Lochak G. (1956b). Décomposition en paramètres de Clebsch de l'impulsion de Dirac et interprétation physique de l'invariance de jauge des équations de la mécanique ondulatoire, *C. R. Acad. Sci.*, **243** p. 357-360.

Jauch J.M. & Rohrlich F. (1955). *The Theory of Electrons and Photons,* Addison Wesley,.

Kazama Y., Yang C.N., Golhaber A.S. (1977). Scattering of a Dirac particle with charge *Ze* by a fixed magnetic monopole. *Phys. Rev.*D 15, 2287–2299.

Kramers H.A. (1964). *Quantum Mechanics*, Dover, N.Y.

Laue M. von, (1922). *Die Relativitätstheorie,* Vieweg, I, II, Braunschweig, 2nd ed.. (French translation : *La théorie de la relativité,* Gauthier-Villars, Paris, I, 1922 ; 2, 1924.

Lochak G. (1957). Signification mécanique de l'invariance de jauge*, C. R. Acad. Sci.*, 245, 2023–2026.

Lochak G. (1959). Quelques problèmes sur le groupe des rotations et la toupie quantique, *Cahiers de Physique*, **13,** p. 41–81.

Lochak G. (1983). Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin ½ (1ère partie) Ann. Fond. L. de Broglie, **8**, 345–372.

Lochak G. (1984). Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin ½ (2ème partie) Ann. Fond. L. de Broglie, **9**, p. 5-30.

Lochak G. (1985). Wave equation for a magnetic monpole *Int. J. Theor. Physics* **24**, 1019-1050.

Lochak G. (1987a). The symmetry between electricity and magnetism and the wave equation of a spin ½ magnetic manopole in : *Information, Complexity and Control in Quantum Physics, Springer Verlag*, Wien.

Lochak G. (1987b). Electric and magnetic states of the Majorana field *Ann. Fond. L. de Broglie*, **12**, 135-164.

Lochak G. (1992). A magnetic monopole in the Dirac field, *Ann. Fond. L. de Broglie*, **17**, 203-216.

Lochak G. (1995b). Magnetic monopole. The symmetry between Electricity and Magnetism and the problem of the existence of a magnetic monopole*, in : Advanced Electromagnetism,* Ed. T.LW. Barrett and D.M. Grimes, World Scientific, Singapore, p. 105-148.

Lochak G. (1997a). P, T, C symmetries, *Ann. Fond. L. de Broglie*, Part I : **22**, 1–22.

Lochak G. (1997b). P, T, C symmetries, *Ann. Fond. L. de Broglie*, Part II : **22**, 187-217.

Lochak G. (2007a). The equation of a Light Leptonic Magnetic Monopole and its Experimental Aspects, Z. für Naturforschung, 62a, 231-246.

Lochak G. (2007b). Twisted space, chiral gauge and magnetism Ann. Fond. L. de Broglie, **32**, p. 125-136.

Lochak G. (2012). Sur une possible fusion nucléaire quasi-catalytique à basse température, Annales de la Fondation Louis de Broglie, **37**, p. 187–195.

Lurie, D. (1968). *Particles and Fields,* Wiley, New York.

Mc Lennan J.A. (1957). Parity nonconservation and the theory of the neutrino. Phys. Rev., 106, 821–822.

Majorana E. (1937). Teoria simmetrica dell'elettrone, neutrino e del positrone. Nuovo Cimento 14, 171–184

Maxwell J.- C., (1873). *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 3^{d} ed. Clarendon Press, 1891, 1954 Dover.

Mignani R. & Recami E. (1975). Complex electromagnetic four-potential and the Cabibbo–Ferrari relation for magnetic monopoles. Nuovo Cimento, 30A, 533–540.

Mikhaïlov V. F. (1985). Observation of magnetic monopoles in the field of a line conductor with a current. *J. Phys. A*, **18,** L903

Mikhaïlov V. F. (1987). Observation of the magnetic charge effect in the experiments with ferromagnetic aerosols, *Ann. Fond. L. de Broglie*, **12**, 491-523

Mikhaïlov V. F. (1993). Light, microparticles and magnetic charge phenomenon, in *Courants, Amers, Ecueils en Microphysique*, Fondation Louis de Broglie, Paris p. 279-290

Möller, C. (1972) *The theory of relativity, 2nd ed.,* Clarendon Press, Oxford

Pauli W. (1936). Contribution mathématique à la théorie des matrices de Dirac, *Annales de l'Institut Henri Poincaré,* **6**, p. 109-136.

Pauli W. (1957). On the conservation of the lepton charge, *Nuovo Cimento*, **6**, 204-215.

Planck M. (1906). Vorlesung über die Theorie der Wärmestrahlung 6^{e} ed ; 1959, eng. trans. *The theory of heat radiation*, Dover, N.Y.

Poincaré H. (1896) Remarques sur une expérience de M. Birkeland, *Comptes rendus Acad. Sc.*, **123**, p. 530-533.

Price P.B., Shirk E.K., Osborne W.Z., Pinsky L.S. (1975). Evidence for detection of a moving monopole. *Phys. Rev. Letters,* **35**, 487–490

Racah G. (1937). Sulla simmetria tra particelle e antiparticelle. *Nuovo Cimento, 1937* **14**, 322–328.

Recami E. & Mignani R. (1976). Magnetic monopoles and tachyons in special relativity. Phys. Letters, **62B**, 41–43.

F. Reines & C. Cowan (1976), Phys. Rev. **92**, p.830.
Rodichev V.I. (1961). *Soviet Phys. JETP*, 1029.
Salam A. (1966). Magnetic monopole and two photon theories of C-violation. Physics Letters, **22**, 683–684.
Sommerfeld A. Electrodynamics, 1914.
Thomson J.J. (1904). *Elements of the Mathematical Theory of Electricity and Magnetism* (Cambridge University Press).
Weyl H. (1950). A remark on the coupling of gravitation and electron. Phys. Rev. **77**, 699–701.
Whittaker E.T., Watson G.N. (1958). *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press
Wu T.T., C.N. Yang C.N. (1976). Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. *Nucl. Phys.* 107 B, 365–380.
Wu T.T., C.N. Yang C.N. (1975). Dirac monopole without strings: monopole harmonics. *Phys. Rev.* **12 D**, 3845–3857.